Лекция 4. Риманның сфералық проекциясы

Жоспар:

1. Кеңейтілген комплекс жазықтық
2. Стереографиялық проекция
3. Риман сферасы

Аналитикалық функция теориясында комплекс жазықтық C шексіз алыстатылған нүктемен (∞) толықтырылады. $\overline{C} = C \bigcup \{\infty\}$ жиыны *кеңейтілген комплекс жазықтық* деп аталады.

R^3 кеңістігінде C жазықтығы R^2 жазықтығымен беттесетіндей және $O\xi$ мен $O\eta$ осьтері Ox пен Oy осьтерімен беттесетіндей $O\xi\eta\zeta$ координаттар системасын енгіземіз. Радиусы $\frac{1}{2}$ болатын, ал центрі $(0,0,\frac{1}{2}) \in S$ болатын S сферасын тұрғызамыз.

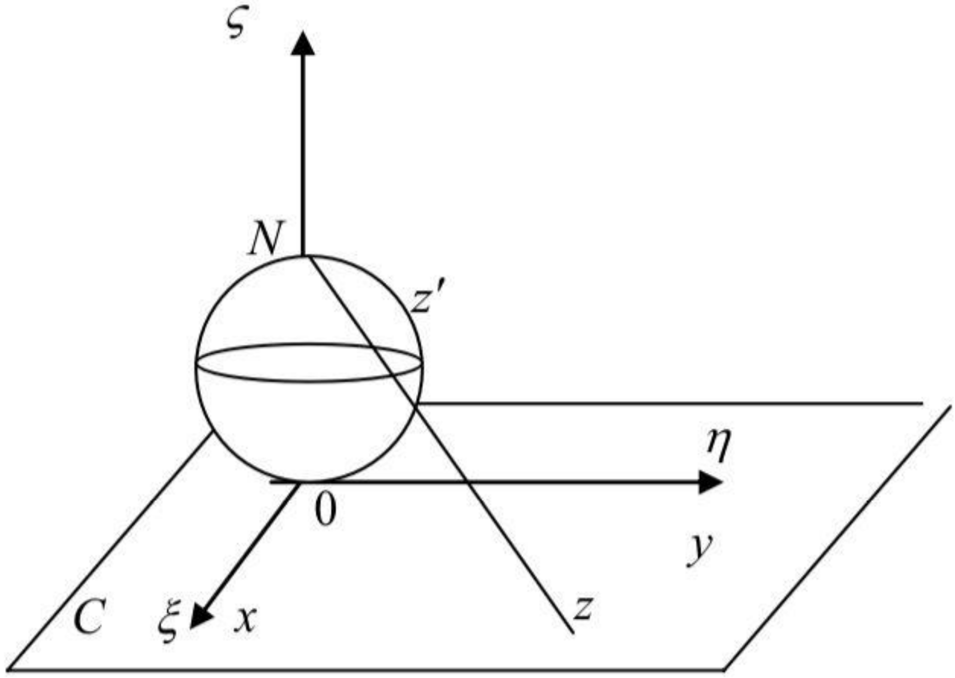
Ал $(\xi,\eta,\zeta) \in S$ нүктелері мына теңдеуді

$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta(1-\zeta) \tag{9}$$

қанағаттандырады.

Енді $(0,0,1)$ нүктесін N деп белгілеп, оны сфераның әртүрлі $z'(\xi,\eta,\zeta)$ нүктелерімен N нүктесінен басталатын түзу сәуле етіп қосамыз және әр сәуленің C

жазықтығымен қиылысқан нүктесін $z = x + iy$ деп белгілейміз. Сонда сфераның N нүктесінен басқа барлық нүктелері C жазықтығына проекцияланады.



Сонымен C мен $S \setminus \{N\}$ жиындарының арасында өзара бірмәнді сәйкестік $z \leftrightarrow z'$ болады. Егер $z = \infty \leftrightarrow N$ десек, онда $\overline{C}$ және S жиындарының арасында өзара бірмәнді сәйкестік аламыз. Осы сәйкестік *стереографикалық проекция* деп аталады, ал S сферасын *Риман сферасы* деп атайды.

Ал енді z және z' нүктелерінің координаталарының арасындағы байланысты қарастырайық. z' нүктесінің координаталары (9) сфера теңдеуін қанағаттандырады, ал z , z' және N нүктелері бір түзу бойында жатқандықтан

$$\frac{\xi - 0}{x - 0} = \frac{\eta - 0}{y - 0} = \frac{\zeta - 1}{0 - 1}.$$

Бұдан

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \; y = \frac{\eta}{1 - \zeta}. \qquad (10)$$

(9) бен (10) формулаларын ескерсек,

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1-\zeta)^2} = \frac{\zeta}{1-\zeta},$$

бұдан

$$\zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}, \quad 1-\zeta = \frac{1}{1+|z|^2}.$$

(10) формуланы ескеріп, келесі оған кері формулаларды аламыз:

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}. \qquad (11)$$

(9), (10), (11) формулаларын стереографикалық проекцияның негізгі формулалары деп атаймыз.

Стереографикалық проекцияның екі маңызды қасиеті бар:

1.стереографикалық проекцияда шеңбер әруақытта шеңберге көшеді (бұл жағдайда C жазықтығындағы түзу шексіз радиусты шеңбер деп есептеледі);

2. егер S сферасындағы екі қисық M нүктесінде қиылысса, ал бұл қисықтарға жүргізілген жанама M нүктесінде α бұрыш жасаса, онда бұл қисықтардың стереографикалық проекциясына олардың қиылысатын M' нүктесінде жүргізілген жанамалардың арасындағы бұрыш та α-ға тең болады, яғни стереографикалық проекцияда бұрыштар сақталады.

Сфераның центрі арқылы өтетін және $\zeta = 0$ жазықтығына параллель жазықтықты экваторлық жазықтық деп атайды. Егер басы сфераның центрінде (O') жатқан радиус-вектор ($\overline{O'A}$) экваторлық жазықтықпен φ бұрышын жасаса, онда $A \in S$ нүктесі ендігі φ болатын параллельде жатыр дейміз. $A(\xi, \eta, \zeta) \in S$ нүктесінің бойлығы деп $\arg(\xi + i\eta)$ айтамыз. Берілген бойлықтың нүктелер жиыны λ осы бойлықтың жарты меридианын құрайды. N нүктесін солтүстік полюс деп, ал O - координаталар бас нүктесін оңтүстік полюс деп атайды.

Пайдаланылған әдебиеттер:

1. Төлегенова М. Б., Қойлышев У.Қ. Комплекс айнымалы функциялар теориясы және Амалдық есептеу. Оқу құралы. Қазақ ун-ті, 2021. Қазақша, орысша, ағылшынша.
2. Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1991 (предыдущие издания 1965, 1967).
3. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть 1. М.: Наука, 1985. (Предыдущие издания: 1968, 1976).
4. Сборник задач по теории аналитических функций. Под ред. М.А. Евграфова. Изд. 2-е доп. М.: Наука,1972.
5. Кангужин Б.Е. Теория функций комплексного переменного. Алматы. Қазақ университеті, 2007.